Università di Pisa - Corso di Laurea in Informatica

Analisi Matematica

Pisa, 8 marzo 2024

Esercizio 1 Sia $F(x) = 1 - \int_1^x t\, e^{-t^2}\, dt$. Determinare l'insieme di definizione, i limiti, la monotonia, massimi e minimi locali e assoluti, estremi superiore e inferiore, convessità e punti di flesso di F.

Soluzione

La funzione integranda è continua e definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ quindi anche la F, che ne è una primitiva, è definita su tutta la retta reale e risulta almeno di calsse C^1. Osserviamo che è possibile calcolare F esplicitamente, infatti:

$$F(x) = 1 - \left[\frac{e^{-t^2}}{-2}\right]_1^x = 1 + \frac{e^{-x^2} - e^{-1}}{2}$$

e da questo tipo di espressione si vede subito che F è pari. Sarà quindi sufficiente studiare F sulla semiretta $[0, +\infty)$ e simmetrizzarne il grafico. Calcoliamo il limite all'infinito:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 - \frac{1}{2e}$$

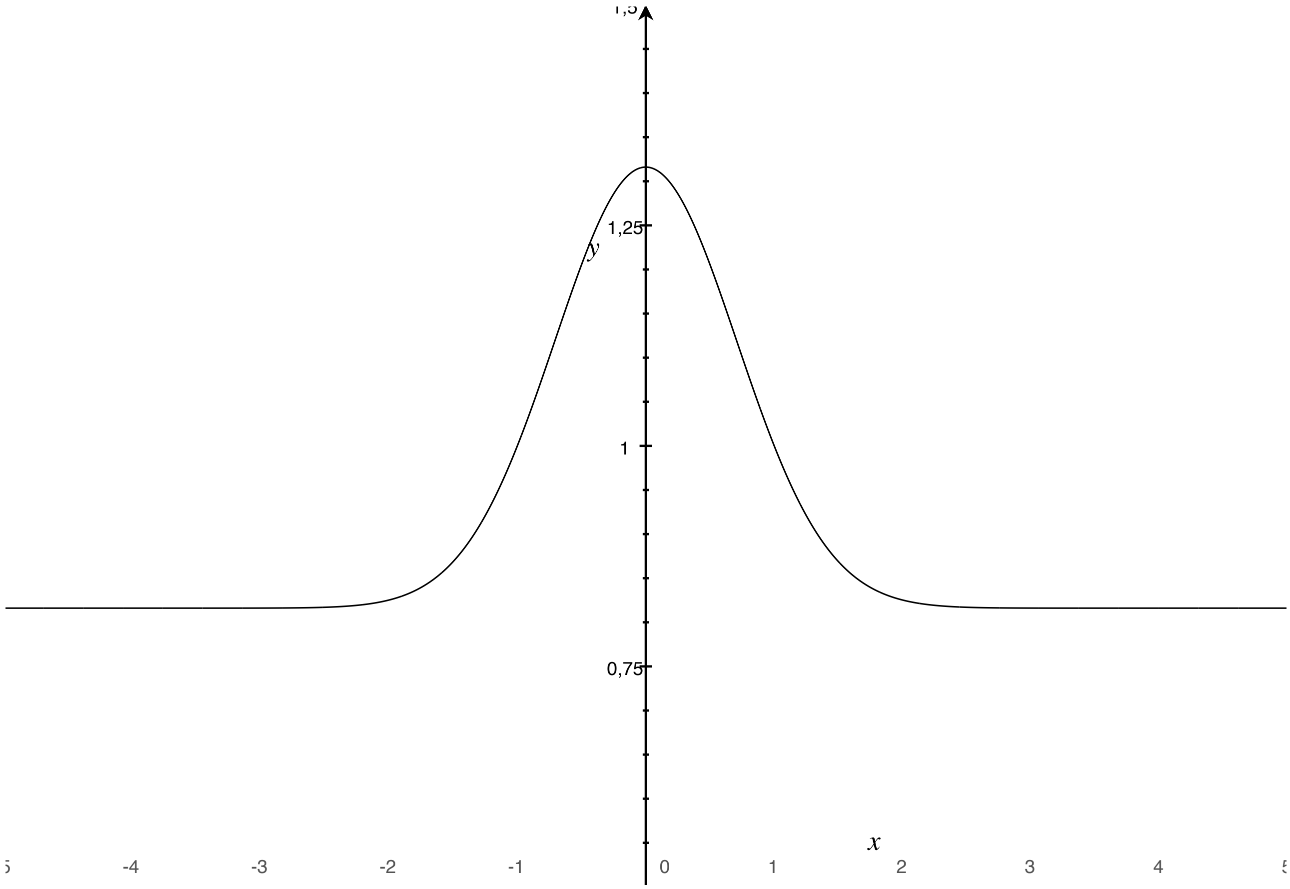
quindi F ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1 - \frac{1}{2e}$. Vediamo ora la derivata:

$$F'(x) = -xe^{-x^2}$$

che è positiva se e solo se $x < 0$ (dato che la funzione esponenziale assume sempre valori positivi). Quindi la F è crescente sulla semiretta $(-\infty, 0]$ e decrescente sulla semiretta $[0, +\infty)$; ne segue che $x = 0$ è un punto di massimo assoluto e $F(0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2e}$ è il massimo della funzione. Per lo stesso motivo l'estremo inferiore è $1 - \frac{1}{2e}$. Per la convessità studiamo il segno della derivata seconda (la F è di classe C^∞):

$$F''(x) = -e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

quindi $F''(x) > 0$ se e solo se $1 - 2x^2 < 0$ cioè $x^2 > \frac{1}{2}$ che è verificata per $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. La F è quindi convessa in ciascuna di queste due semirette e concava nell'intervallo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. I punti $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso per F.



Esercizio 2 Calcolare il limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^{\,2n}+5^n}{6^n}}$.

Soluzione

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{\,2n}+5^n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^{\,n}+5^n}{6^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{\,n}\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)}{6^n}} = \frac{5}{6}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4^n}{5^n}+1\right)} = \frac{5}{6}.$$

Esercizio 3 Dire se converge il seguente integrale generalizzato

$$\int_0^{1/e^2} \frac{1}{x+x\log^3 x}\,dx$$

Soluzione

Osserviamo che la funzione integranda è continua sull'intervallo $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ dato che il denominatore si annulla solo per $x=0$ e $x=\frac{1}{e}$. Applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital si ottiene che $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log^3 x = 0$, quindi la funzione non è limitata nell'intorno di 0. Per quello che riguarda la convergenza dell'integrale, basta quindi verificare se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^{1/e^2} \frac{1}{x+x\log^3 x}\,dx$$

Eseguiamo la sostituzione $y = \log x$ ottenendo che

$$\int_{\varepsilon}^{1/e^2} \frac{1}{x + x\log^3 x}\,dx = \int_{\log\varepsilon}^{-2} \frac{1}{1+y^3}\,dy$$

Dato che $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \log\varepsilon = -\infty$, l'integrale dato convergerà se e solo se convergerà l'integrale

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{1+y^3}\,dy$$

Dato che $\frac{1}{1+y^3} \sim \frac{1}{y^3}$ per $y \to -\infty$ per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge.